గణితం

10th Class (T.M) Reading Material

బీజగణిత పితామహుడు డయాఫాంటస్

Diophantus

Prepared By

AVULA HARIKRISHNA YADAV

M.Sc., B.Ed.

3.బహుపదులు

స్థిరరాశి : - ఒక స్థిరమైన విలువను కలిగి వుండే రాశులను స్థిరరాశులు అంటారు.

Ex :- 2 , π , 3............

చరరాశి : - నిర్ణీత సమితిలోని ఏ విలువైన తీసుకొనే బీజాలను చరరాశులు అంటారు.

Ex :- x ,y.........................

పదము : - కేవలం స్థిర రాశులను కాని లేక కేవలం చరరాశులను కాని లేక గుణాకార ప్రక్రియలో కూడి వున్న స్థిర , చర రాశుల సముదాయాన్ని కాని పదము అంటారు.

Ex :- 2, -5 , a, x, bc, 5n, -7m

బీజీయ సమాసము :- + , - అను గుర్తులలో ఒక దానిచే కాని లేక రెండింటిచే కాని కలసి వున్న పదాల సముదాయాన్ని " బీజీయ సమాసము " అంటారు.

Ex :- 5x+6y , 2a- 3b , 7p – 6q - $\frac{8}{3}r$

- ఒకే పదాన్ని కలిగి వున్న బీజీయ సమాసాన్ని ఏకపది అంటారు.

  Ex :- 7x , -6y, 2 , -5/6

- రెండు పదాలను కలిగి వున్న బీజీయ సమాసాన్ని ద్విపది అంటారు.

  Ex :- 7x+5, 6y-p , $\frac{l}{2}+5$

- మూడు పదాలను కలిగి వున్న బీజీయ సమాసాన్ని త్రిపది అంటారు.

  Ex :- 2x+3y+4z, $\frac{l}{2}+\frac{m}{3}-4n$

- మూడు కంటే ఎక్కువ పదాలను కలిగి వున్న బీజీయ సమాసాన్ని బహుపది అంటారు.

ఒక ప్రమేయం p(x) అనునది $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots\dots + a_n x^n$ రూపంలో వుంటే దానిని బహుపది అంటారు.

1) $a_0 , a_1 , a_2 , a_3 \dots\dots a_n$ అనునవి వాస్తవసంఖ్యలు మరియు వాటిని బహుపది గుణకాలు అంటారు.
2) n అనునది రుణేతర పూర్ణసంఖ్య.

Ex :- x + 2 , x^2 + 4x +6 , $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$, $3x^2 + \sqrt{5}\,x + \sqrt{6}$

బహుపదులు కాని వాటికి ఉదాహరణలు :-

1) $\frac{2}{x}+3$ (x యొక్క ఘాతాంకం - 1)
2) $x^2 + 2x + \frac{4}{x}$ (x యొక్క ఘాతాంకం - 1)

3) $\sqrt{x}$ + 4 (x యొక్క ఘాతాంకం $\frac{1}{2}$)

గుణకం :- రెండు కాని అంతకంటే ఎక్కువ కారణాంకాలు కలిగిన లబ్ధంలో ప్రతి కారణాంకాన్ని మిగిలిన కారణాంకాల లబ్ధం యొక్క గుణకం అంటారు.

Ex :- 5xy లో 5, xy యొక్క గుణకం

సజాతి, విజాతి పదాలు : - ఒకే బీజీయ గుణకాన్ని కలిగి వున్న పదాలను సజాతి పదాలు అంటారు. ఈ విదంగా లేనివి విజాతి పదాలు అంటారు.

EX: - $6x^2y$, $8x^2y$ అనునవి సజాతి పదాలు

$4xy^2$, $6x^2y^2$ అనునవి విజాతి పదాలు

బహుపది పరిమాణం :- x చరరాశిలో గల బహుపది p(x) లో x యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకం బహుపది p(x) యొక్క పరి మాణం అగును.

Ex:- $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1$ బహుపది పరిమాణం = 4

- బహుపది పరిమాణం 1 గా గల బహుపదులను రేఖీయ బహుపది అంటారు.
- రేఖీయ బహుపది సాదారణ రూపము = **ax +b**
- బహుపది పరిమాణం 2 గా గల బహుపదులను వర్గ బహుపది అంటారు
- వర్గ బహుపది సాదారణ రూపము = $\mathbf{ax^2 + bx + c}$
- బహుపది పరిమాణం 3 గా గల బహుపదులను ఘన బహుపది అంటారు
- ఘన బహుపది సాదారణ రూపము = $\mathbf{ax^3 + bx^2 + cx + d}$

బహుపది విలువ :- Kఅనునది వాస్తసంఖ్య అయినపుడు చరరాశి x కు బదులుగా k ను ప్రతిక్షేపిస్తే వచ్చే విలువ p(k) అవుతుంది. p(k) ను p(x) అనే బహుపదికి k వద్ద వచ్చు విలువ అంటారు.

Ex :- $p(x) = x^2 - 2x - 3$

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^2 - 2(1) - 3 \\ &= 1 - 2 - 3 \\ &= 1 - 5 \\ &= -4 \end{aligned}$$

P(x) విలువ 1 వద్ద -4 అగును.

బహుపది శూన్యాలు :-

వాస్తవ సంఖ్య K వద్ద p(x)= 0 అయిన k ను p(x) యొక్క శూన్యం అంటారు. $\Longrightarrow$ p(k)= 0

Ex:- $p(x) = x^2 - 2x - 3$

$P(3) = (3)^2 - 2(3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 9 - 9 = 0$

3 అనునది p(x) యొక్క శూన్య విలువ అనగా p(3) = 0

బహుపది శూన్యాలకు జామితీయ అర్థాలు:-

- $Y = ax + b$ అనే బహుపది యొక్క రేఖా చిత్రం ఒక సరళరేఖ.
- $Y = ax + b$ అను రేఖాచిత్రం x – అక్షంను ఖచ్చితంగా ఒకే బిందువు $(\frac{-b}{a}, 0)$ వద్ద ఖండిస్తుంది. కావున ax+b ($a \neq 0$) అనే రేఖాచిత్రం $y = ax + b$, x – అక్షంను ఖండించే బిందువు x – నిరూపకం అగును.

వర్గ బహుపది : -

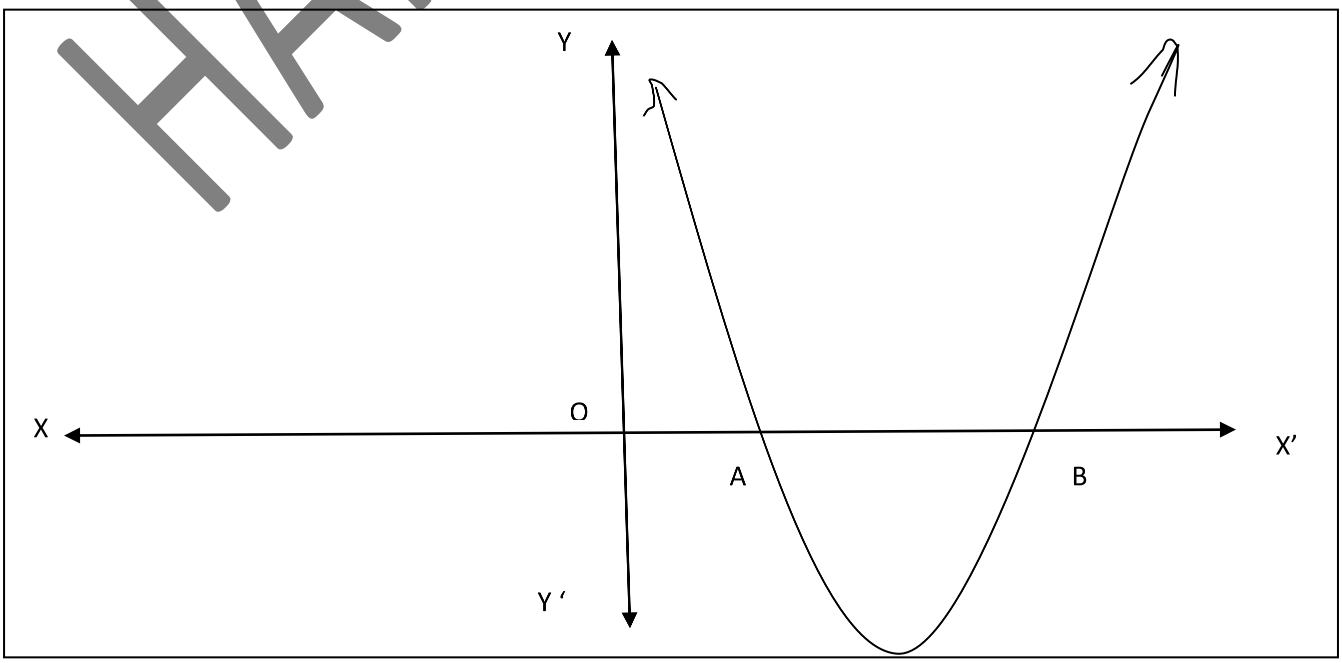
వర్గ బహుపది యొక్క సాదారణ రూపం $a x^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- $Y = a x^2 + bx + c$ యొక్క రేఖా చిత్రం $a > 0$ అయినపుడు దాని ఆకారం పై వైపునకు వచ్చు వక్రంగా వుంటుంది.
- $Y = a x^2 + bx + c$ యొక్క రేఖా చిత్రం $a < 0$ అయినపుడు దాని ఆకారం క్రింది వైపునకు వచ్చు వక్రంగా వుంటుంది. ఈ వక్రాలను పరావలయాలు అంటారు.
- $a x^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) వర్గ బహుపది యొక్క శూన్యాలలు $y = a x^2 + bx + c$ రేఖాచిత్రం x - అక్షాన్ని ఏ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుందో ఆ బిదువు యొక్క x – నిరూపకాలగును.
- $Y = a x^2 + bx + c$ రేఖాచిత్రాలు 3 రకాలుగా వుంటుంది. ఇది $a x^2 + bx + c$ యొక్క విచక్షణి అయిన $b^2 - 4ac$ పై ఆదారపడి వుంటుంది.

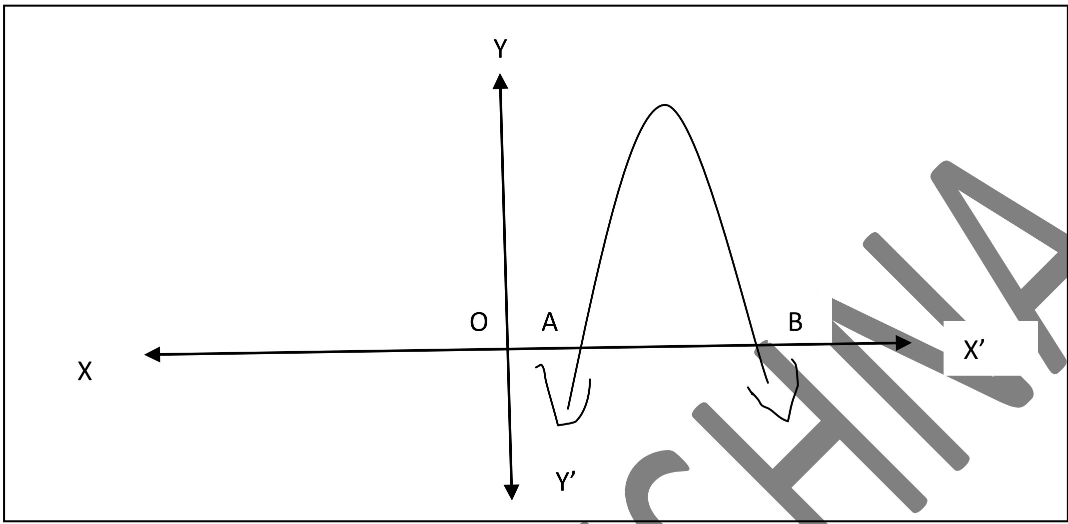
మొదటి రకం:-

$Y = a x^2 + bx + c$ రేఖాచిత్రం x – అక్షాన్ని 2 వేర్వేరు బిందువులు A , B వద్ద ఖండించినపుడు A, B బిందువు యొక్క x - నిరూపకాలు $a x^2 + bx + c$ కు శూన్యాలగును.

- నియమము :- **$b^2 - 4ac > 0$ మరియు $a > 0$** అయినపుడు

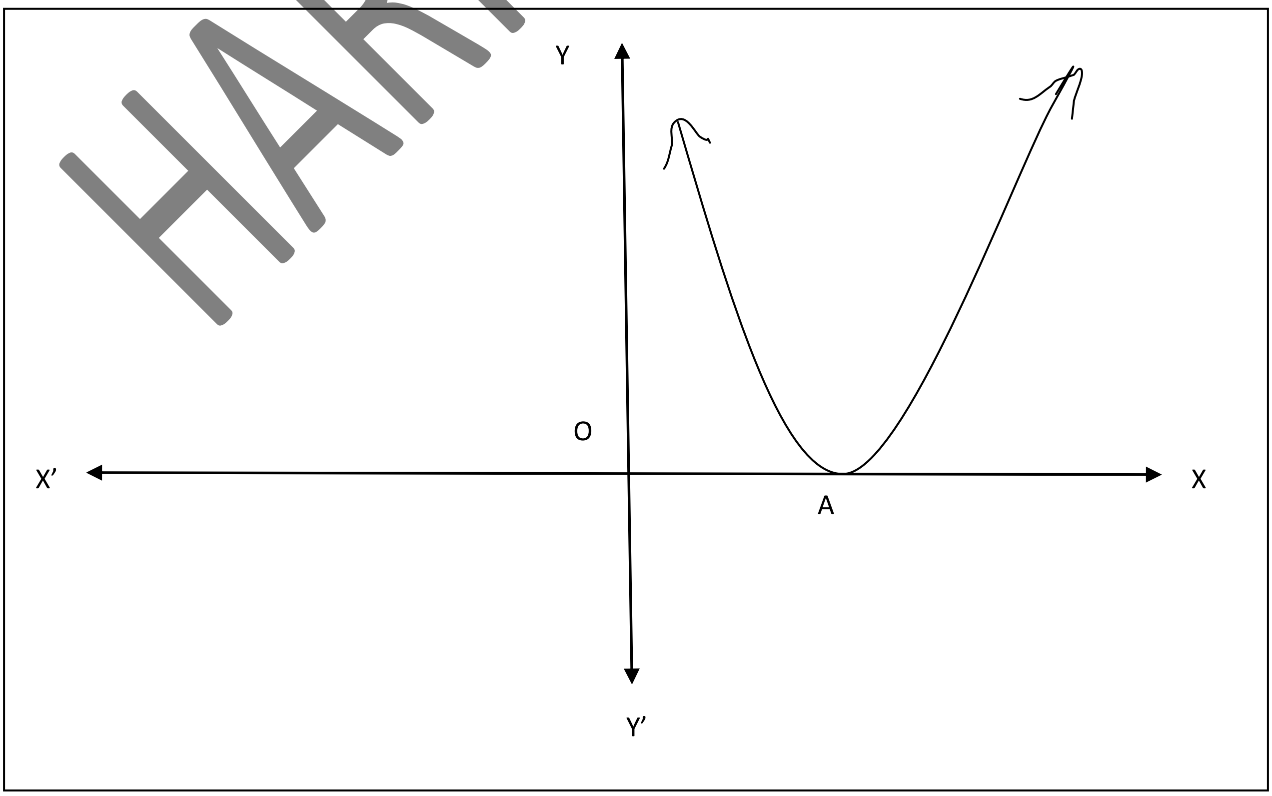


- నియమము :- $b^2 - 4ac > 0$ మరియు $a < 0$ అయినపుడు

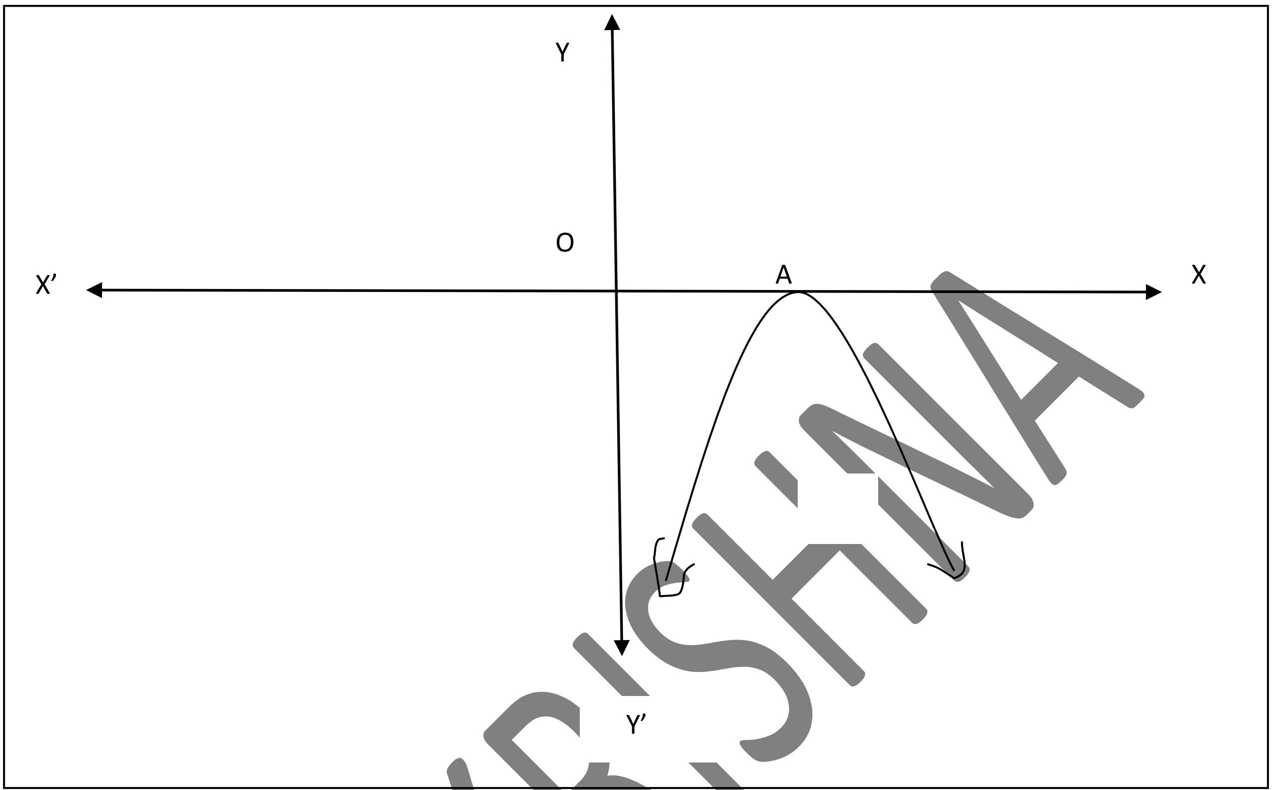


రెండవ రకం :- ఇక్కడ రేఖాచిత్రం x - అక్షాన్ని ఒకే బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది అనగా రెండు బిందువులు మిళితమగును. A మరియు B మిళితమై బిందువు A ను ఏర్పరుస్తాయి. వర్గ బహుపది యొక్క శూన్య బిందువు A యొక్క x - నిరూపకం అవుతుంది.

- నియమము :- $b^2 - 4ac = 0$ మరియు $a > 0$ అయినపుడు

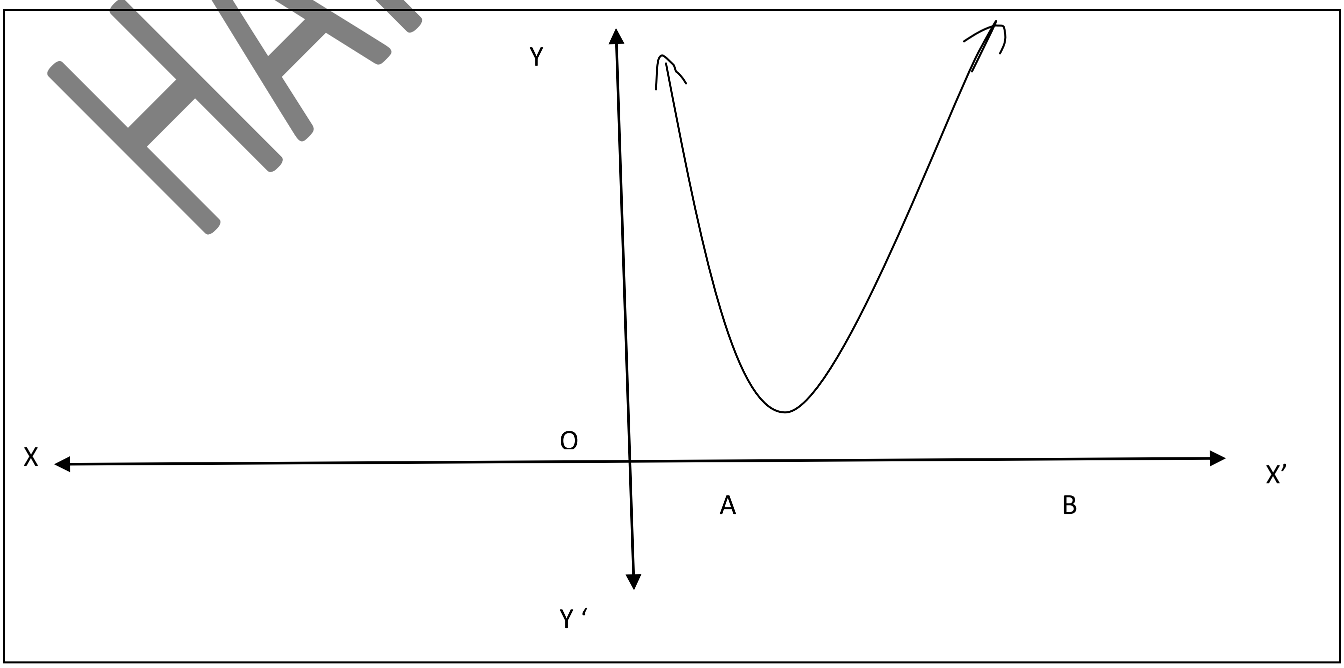


- నియమము :- **$b^2 - 4ac = 0$ మరియు $a < 0$** అయినపుడు

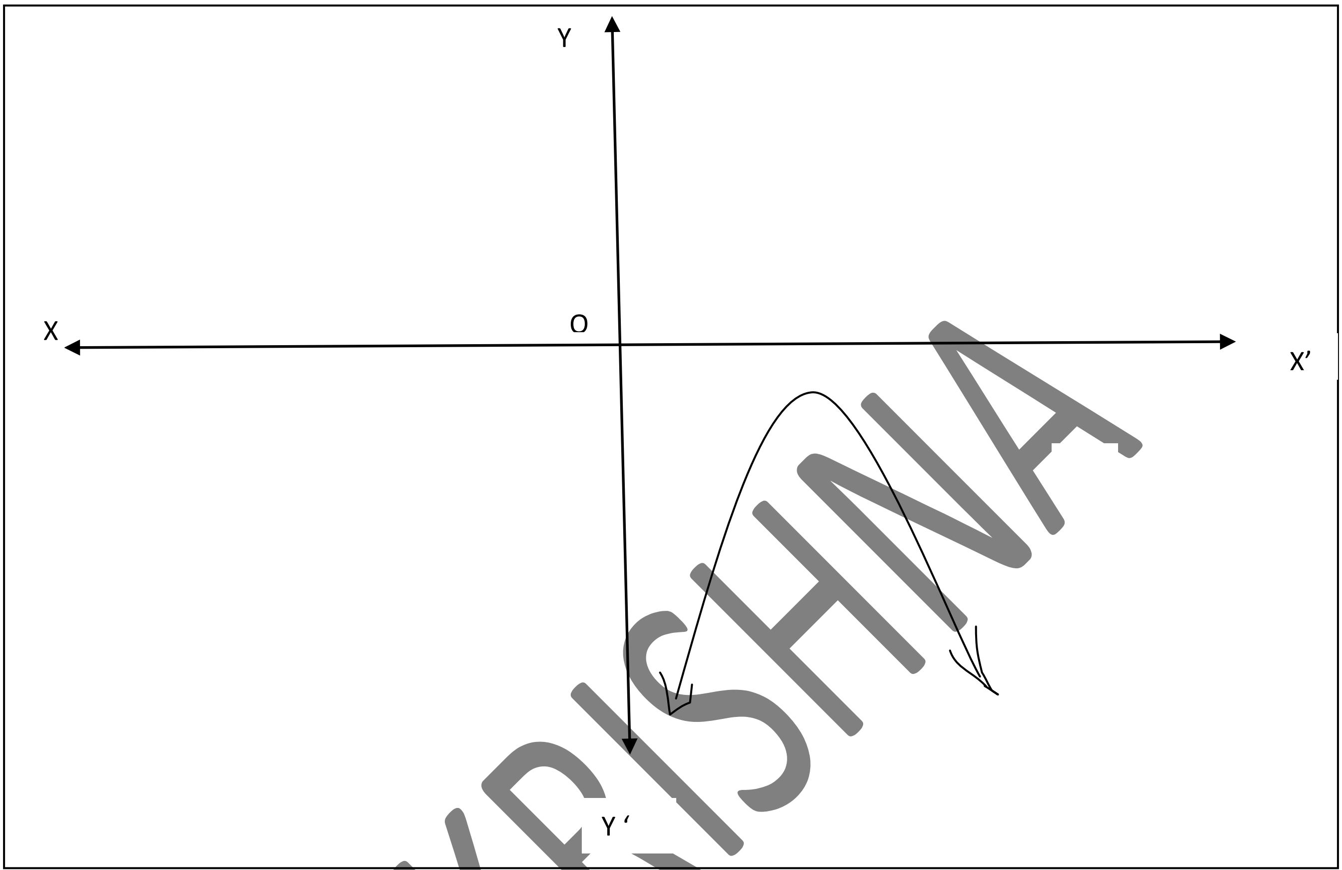


<u>మూడవ రకం</u> : - ఇక్కడ రేఖాచిత్రం X – అక్షాన్ని ఖండించదు. రేఖాచిత్రం x- అక్షానికి పూర్తిగా పైన కాని క్రింద కాని వుంటుంది. కావున $a x^2 + b x + c$ కు శూన్యాలుండవు.

- నియమము :- **$b^2 - 4ac < 0$ మరియు $a > 0$** అయినపుడు



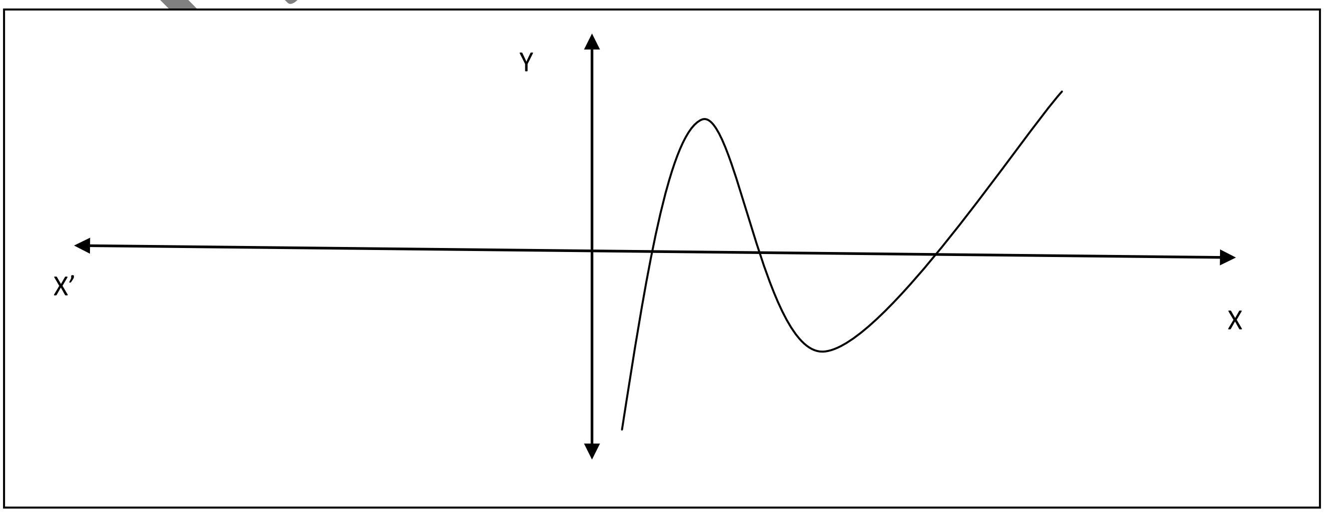
- నియమము :- $b^2 - 4ac < 0$ మరియు $a < 0$ అయినపుడు



పై రకాలను బట్టి వర్గ బహుపదికి గరిష్ఠంగా శున్యాలు వుంటాయని అర్థమగును.

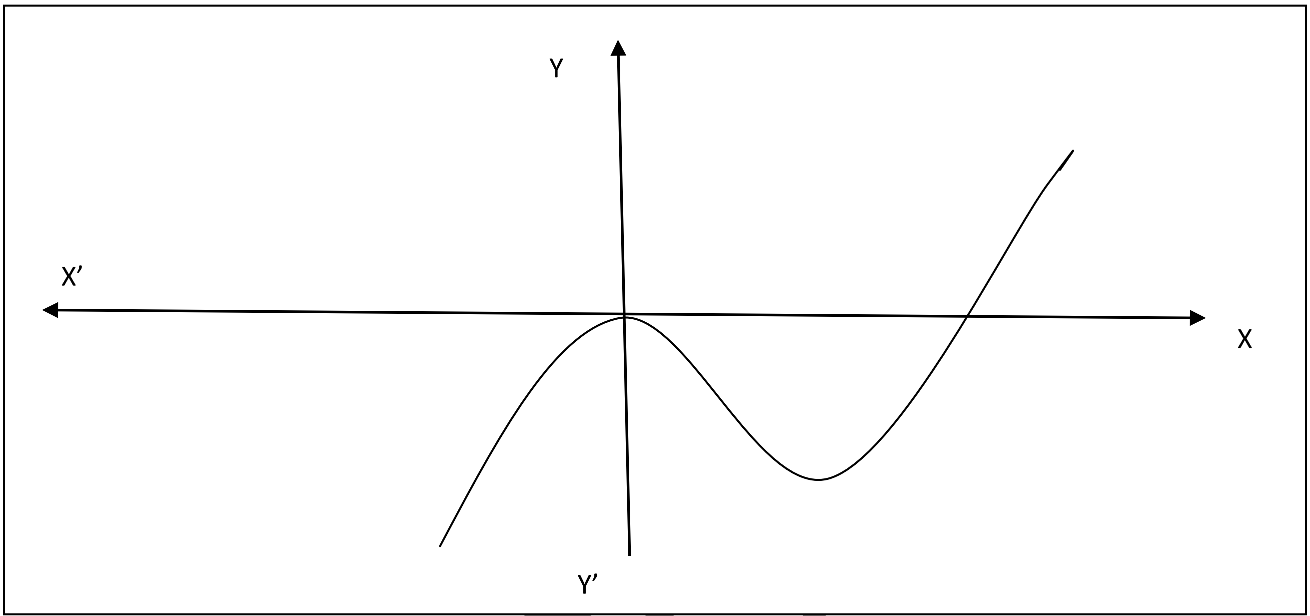
ఘన బహుపది శూన్యాలకు జామితీయ రూపము :-

సందర్భం ***1*** :- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ అనే బపది తీసుకున్నపుడు దీని రేఖాచిత్రం x - అక్షాన్ని (1 , 0) , (2, 0), (3, 0)వద్ద ఖండించును. ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యాలు బిందువుల యొక్క x – నిరూపకాలగును.

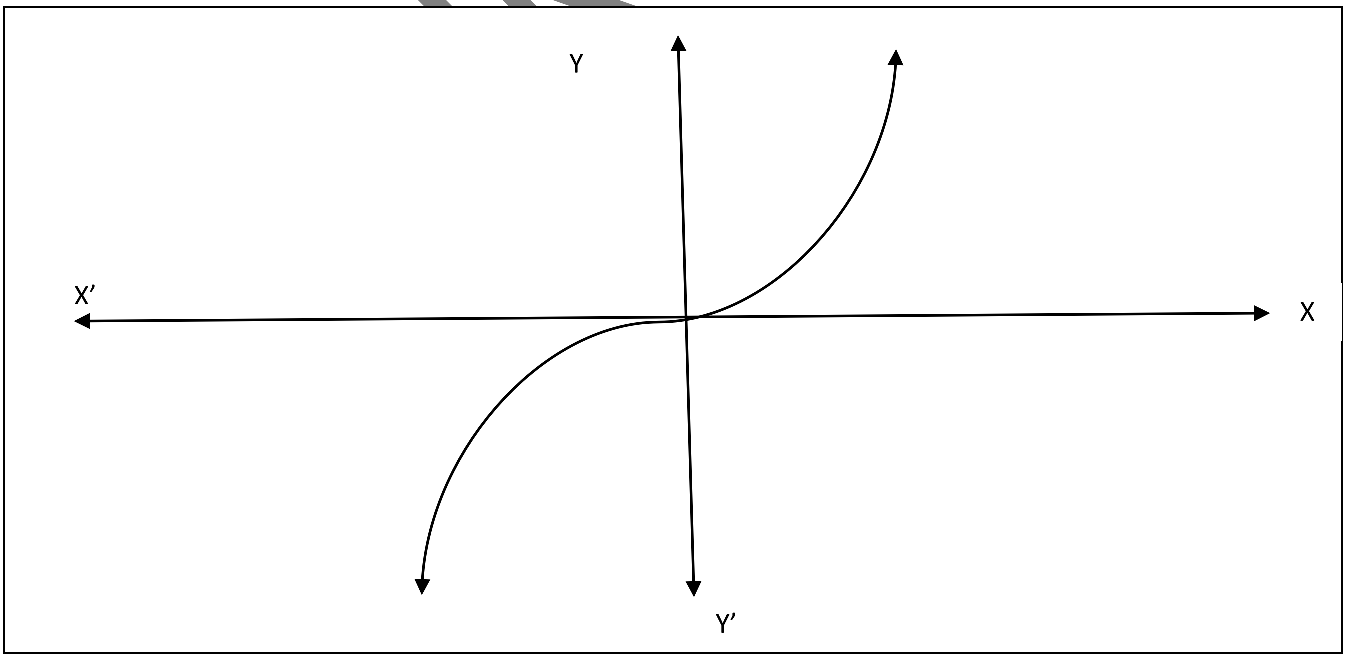


Y’

సందర్భం ***2*** :- $X^3 - X^2$ అనే ఘున బహుపది x – అక్షాన్ని (0 ,0) మరియు (1,0) బిందువుల వద్ద ఖండించును. ఇచ్చిన బహుపది యొక్క శూన్యాలు బిందువుల యొక్క x – నిరూపకాలగును.



సందర్భం ***3*** :- $Y = x^3$ అనే ఘున బహుపది X – అక్షాన్ని (0,0) బిందువు వద్ద ఖండించును. కావున దీనికి ఒకే ఒక శూన్యం వుంటుంది.



- పై సందర్భాలను బట్టి ఘునబహుపదికి గరిష్ఠంగా 3 శూన్యాలు వుంటాయని అర్ధమగును.

బహుపది శూన్యాలకు మరియు గుణకాలకు కల సంబంధం :-

α (ఆల్ఫా) మరియు β (బీటా) అనునవి వర్గబహుపది యొక్క శూన్యాలైన

$$\alpha + \beta = \frac{-(\text{ x యొక్క గుణకము })}{x^2 \text{ యొక్క గుణకము}}$$

$$\alpha . \beta = \frac{\text{స్థిరపదము}}{x^2\text{యొక్క గుణకము}}$$

α , β శూన్యాలయినపుడు ఆ వర్గ బహుపది అగును $X^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha . \beta$

α , β , γ (గామాలు ఘనబహుపది యొక్క శూన్యాలైన

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-x^2\text{గుణకము}}{x^3\text{గుణకము}}$$

$$\alpha . \beta + \beta . \gamma + \gamma . \alpha = \frac{x\text{ గుణకము}}{x^3\text{గుణకము}}$$

$$\alpha . \beta . \gamma = \frac{-\text{స్థిరపదము}}{x^3\text{గుణకము}}$$

బహుపదుల భాగాహార నియమము :-

P(x) మరియు g (x) అనేవి రెండు బహుపదులు, g(x) ≠ 0 అయినపుడు మనం మరి రెండు బహుపదులు q(x) మరియు r(x) లను పొందాలంటే

r(x) = 0 లేదా r(x) పరిమాణం < g(x) పరిమాణం

p(x) = g(x) X q(x) + r(x)